# CUPRINS

# TESTE INIȚIALE

*Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

## TESTUL 1

**Partea I.** *Scrieți doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

*(0,5p)* **1.** Rezultatul calculului $3\left(\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{18}$ este:

A. –1; B. –3; C. $6\sqrt{2}$; D. $-6\sqrt{2}$.

*(0,5p)* **2.** Soluția ecuației $\frac{x}{2}+\frac{1-x}{3}=1\frac{5}{6}$ este:

A. $\frac{9}{5}$; B. 11; C. 9; D. 0.

*(0,5p)* **3.** Valoarea lui $m$ pentru care perechea (–2, 1) este soluție a sistemului $\begin{cases}2x+3y=-1\\ mx-y=3\end{cases}$ este:

A. 3; B. 4; C. 1; D. –2.

*(0,5p)* **4.** Lungimea segmentului având capetele $A(1, 2)$ și $B(2, -1)$ este:

A. 4; B. 5; C. $3\sqrt{2}$; D. $\sqrt{10}$.

*(0,5p)* **5.** Un romb $ABCD$ are $\sphericalangle BAD = 30°$. Măsura unghiului $ABC$ este egală cu:

A. 90°; B. 120°; C. 150°; D. 60°.

*(0,5p)* **6.** Un pătrat are aria egală cu 8 cm$^2$. Lungimea diagonalei sale este:

A. 8 cm; B. 4 cm; C. $2\sqrt{2}$ cm; D. $4\sqrt{2}$ cm.

*(0,5p)* **7.** Lungimea cercului având raza egală cu $\pi$ cm este:

A. $2\pi^2$ cm; B. $2\pi$ cm; C. $\pi^2$ cm; D. $4\pi$ cm.

*(0,5p)* **8.** Aria hexagonului regulat având apotema egală cu $6\sqrt{3}$ cm este:

A. 108 cm$^2$; B. $72\sqrt{3}$ cm$^2$; C. 54 cm$^2$; D. $216\sqrt{3}$ cm$^2$.

**Partea a II-a.** *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

*(1p)* **1.** Fie numerele $a=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)\cdot\sqrt{7\frac{1}{9}}$ și $b=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)\cdot\sqrt{5^2-4^2}$. Aflați media geometrică a celor două numere.

*(1p)* **2.** Prețul unui produs este 120 lei. După o scumpire, prețul devine 126 lei. Aflați cu ce procent s-a scumpit produsul.

*(1p)* **3.** Un trapez isoscel are lungimea bazei mari egală cu 12 cm și lungimea liniei mijlocii egală cu 10 cm. Aflați lungimea segmentului care unește mijloacele diagonalelor.

# CAPITOLUL I
# INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

## I.1. MULŢIMI DEFINITE CU AJUTORUL UNEI PROPRIETĂŢI COMUNE ELEMENTELOR LOR

Dacă, pentru o mulțime $M$, putem identifica o anumită proprietate $p$ pe care toate elementele mulțimii o verifică și niciun element care nu aparține mulțimii nu o verifică (numită **proprietate caracteristică** a mulțimii $M$), vom nota mulțimea $M$ astfel:

$$M = \{x \mid x \text{ are proprietatea } p\}.$$

Citim: „$M$ este mulțimea acelor $x$ care au proprietatea $p$”.

### PROBLEME REZOLVATE

**1.** Scrieți, prin enumerarea elementelor, următoarele mulțimi:

$A = \{x \mid x$ este vocală în cuvântul *paralelipiped*$\}$; $B = \{a \mid a$ este cifră, $\overline{12a} \vdots 3\}$;

$C = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -2 < x \leq 3\}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = -5\}$.

*Soluție:* $A = \{$a, e, i$\}$; $B = \{0, 3, 6, 9\}$; $C = \{-1, 1, 2, 3\}$; $D = \{(-5, 1); (-1, 5); (1, -5); (5, -1)\}$.

**2.** Fie mulțimea $A = \{8, 12, 20, 27, 30, 45, 106\}$. Determinați mulțimile:

$$B = \{x \in A \mid x \vdots 4\};\ C = \{x \in A \mid x \vdots 9\};\ D = \{x \in A \mid x \vdots 2 \text{ și } x \not\vdots\ 4\}.$$

*Soluție:* $B = \{8, 12, 20\}$; $C = \{27, 45\}$; $D = \{30, 106\}$.

**3.** Considerăm, în plan, un sistem ortogonal de axe $xOy$ și notăm cu $(x_P, y_P)$ coordonatele unui punct $P$. Reprezentați geometric mulțimile:

a) $A = \{P \mid x_P = 0\}$; b) $B = \{P \mid y_P = 1\}$; c) $C = \{P \mid x_P < 0\}$.

*Soluție:* a) Elementele mulțimii $A$ sunt acele puncte care au abscisa egală cu 0, adică toate punctele axei $Oy$ (figura 1).

b) Elementele mulțimii $B$ sunt acele puncte care au ordonata egală cu 1, adică punctele unei drepte paralele cu axa $Ox$, care conține punctul $M(0, 1)$ (figura 2).

c) Elementele mulțimii $C$ sunt acele puncte care au abscisa negativă și ordonata neprecizată, adică toate punctele semiplanului deschis cu frontiera $Oy$, situat în stânga axei $Oy$ (figura 3).

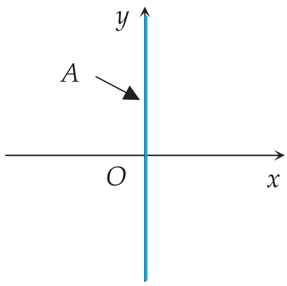



*Figura 1*

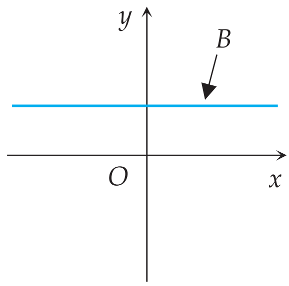



*Figura 2*

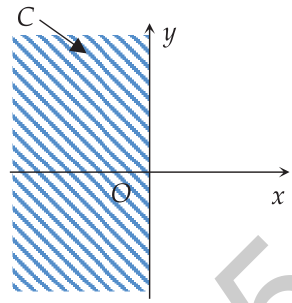



*Figura 3*

**4.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k + 2,\ k \in \mathbb{Z}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 32 - 3p,\ p \in \mathbb{Z}\}$. Arătați că $A = B$.

*Soluție:* Vom demonstra că $A \subset B$ și $B \subset A$. Fie $x \in A$, adică $x = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$. Atunci $x = 32 + 3k - 30 = 32 - 3(10 - k)$. Notând $10 - k = p \in \mathbb{Z}$, obținem că $x = 32 - 3p$, deci $x \in B$ și deducem că $A \subset B$. Reciproc: Dacă $x \in B$, rezultă că $x = 32 - 3p = 3(10 - p) + 2 = 3k + 2$, unde $k = 10 - p \in \mathbb{Z}$. Astfel, $x \in A$ și am arătat că $B \subset A$, ceea ce încheie demonstrația.

## PROBLEME PROPUSE

**1.** Scrieți, prin enumerarea elementelor, următoarele mulțimi:
$A = \{x \mid x$ este vocală în cuvântul *mulțime*$\}$; $B = \{x \mid x$ este cifră impară$\}$;
$C = \{x \mid x$ este cifră a bazei 2$\}$; $D = \{x \mid x$ este număr prim de o cifră$\}$.

**2.** Determinați elementele următoarelor mulțimi:
a) $A = \{x \mid \overline{2x5} \vdots 3\}$; b) $B = \{x \mid \overline{x32} \vdots 2\}$;
c) $C = \{x \mid \overline{xx72} \vdots 9\}$; d) $D = \{x \mid \overline{12x} \vdots 4\}$.

**3.** Fie mulțimile $A = \{-2, 1, 7\}$ și $B = \{0, 1\}$. Determinați elementele următoarelor mulțimi:
a) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$; b) $A \cap B = \{x \mid x \in A$ și $x \in B\}$;
c) $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ și $x \notin B\}$; d) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ și $y \in B\}$.

**4.** Determinați elementele următoarelor mulțimi:
a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*,\ 2^x < 15\}$; b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \mid 2\}$;
c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^*,\ |x| < 2\}$; d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ 1 < x - 1 \le 3\}$.

**5.** Scrieți cu ajutorul unei proprietăți caracteristice următoarele mulțimi:
a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; b) $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$;
c) $C = \{1, 2, 4, 8\}$; d) $D = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$.

# CAPITOLUL II
# CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

## II.1. Operații cu numere reale reprezentate prin litere: adunarea și scăderea. Reducerea termenilor asemenea

**1.** Pentru a calcula sumele $3\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ sau $3\cdot 7^{13}+5\cdot 7^{13}$ folosim proprietăți ale operațiilor cu numere reale:

$$3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(3+5)\sqrt{3}=8\sqrt{3};$$

$$3\cdot 7^{13}+5\cdot 7^{13}=(3+5)\cdot 7^{13}=8\cdot 7^{13}.$$

Dacă înlocuim numerele $\sqrt{3}$ sau $7^{13}$ cu un număr real oarecare $x$, avem în mod analog:

$$3x + 5x = (3 + 5)x = 8x.$$

În toate calculele pe care le vom efectua în continuare, prin litere desemnăm numere reale oarecare.

**2.** În suma algebrică:

$$3x^2 - 2xy + y^2 - 5,$$

termenii sunt $3x^2$, $-2xy$, $y^2$ și $-5$; termenul $3x^2$ are coeficientul 3, $-2xy$ are coeficientul $-2$, iar $y^2$ are coeficientul 1.

**3.** Termenii $-2xy$ și $7xy$, care au aceeași parte literală, se numesc **termeni asemenea**.

De obicei, într-o sumă algebrică, termenii asemenea se reduc:

$$\underline{6x^2} - \underline{\underline{2xy}} + \underline{\underline{7xy}} - \underline{10x^2} + 3 = -4x^2 + 5xy + 3.$$

### Problemă rezolvată

Fie $x$ și $y$ două numere reale. Calculați:

a) $9x - 7y + 3y - 2x$;
b) $x + 4x + 5y - 11x - 12y + 7y$;
c) $2(x + 3y) - 3(2x - y)$;
d) $(2x - y) - (x - 3y) - (-x + 2y)$.

*Soluție:* a) $9x - 7y + 3y - 2x = (9x - 2x) + (-7y + 3y) = 7x - 4y$;
b) $x + 4x + 5y - 11x - 12y + 7y = (x + 4x - 11x) + (5y - 12y + 7y) = -6x + 0 = -6x$;
c) $2(x + 3y) - 3(2x - y) = 2x + 6y - 6x + 3y = -4x + 9y$;
d) $(2x - y) - (x - 3y) - (-x + 2y) = 2x - y - x + 3y + x - 2y = 2x$.

**10.** Fie $a = x + 2y - 3z$, $b = 2x - 3y + z$ și $c = -3x + y + 2z$, unde $x, y, z$ sunt numere reale. Arătați că $a + b + c$ este număr întreg.

**11.** Fie $x, y, z$ trei numere reale și $a = 2x - 3y + z$, $b = 3x - 3y - z$. Calculați $a + b$ și $a - b$.

**12.** Fie $a \in \mathbb{R}$ și $x = 3a^2 - 3a + 5$, $y = -a^2 - a + 3$, $z = 2a^2 + 4a - 8$. Calculați $z - y$, $x + y - z$, $x + y + z$, $x - (y + z)$ și $y - (x - z)$.

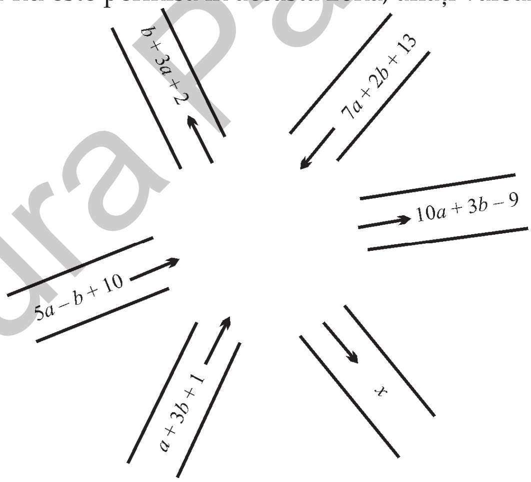
**13.** Vlad a cumpărat 3 caiete și 2 creioane. Dacă un caiet costă $6a$ lei, iar un creion costă un sfert din prețul unui caiet, aflați câți lei a plătit Vlad.

**14.** Se consideră expresia $E(x) = 3x - (7x - 5) + (7 - 4x) - (11 - 9x)$. Calculați $E\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

**15.** Maria a cumpărat de la piață 3 kg de roșii cu $a$ lei kilogramul, 2 kg de struguri cu $(a + b)$ lei kilogramul, 5 kg de pere cu $(b - a + 9)$ lei kilogramul și 7 kg de ardei cu $(12 - b)$ lei kilogramul. Câți lei a cheltuit Maria la piață?

**16.** Un fermier duce într-o zi la piață 30 kg de fructe: mere, pere și struguri, pe care le vinde cu următoarele prețuri: merele cu 2 lei/kg, perele cu 3 lei/kg și strugurii cu 4 lei/kg. Într-o altă zi, fermierul vinde aceeași cantitate din fiecare fel de fructe, cu următoarele prețuri: merele cu 4 lei/kg, perele cu 2 lei/kg și strugurii cu 3 lei/kg. Știind că, în fiecare din cele două zile, el a obținut aceeași sumă de bani, aflați cantitatea de mere adusă la piață de fermier (într-o zi).

**17.** Figura de mai jos reprezintă schematic străzile adiacente centrului civic, cu sens unic de deplasare, precum și numărul mașinilor care au trecut într-o oră. Știind că staționarea mașinilor nu este permisă în această zonă, aflați valoarea lui $x$.




**18.** Determinați numerele reale $a$ și $b$, știind că $\dfrac{b + a}{13} = \dfrac{3a - 2b}{29} = \dfrac{b - 4a}{73}$.

**19.** Calculați:

a) $a - 2a + 3a - 4a + 5a - 6a$;

b) $x - 2x + 3x - 4x + \ldots + 19x - 20x$;

# II.11. ÎNMULŢIREA, ÎMPĂRŢIREA ŞI RIDICAREA LA PUTERE A FRACŢIILOR ALGEBRICE

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Calculați:

a) $\dfrac{2x+3}{x}\cdot\dfrac{x-1}{2x}$, $x\in\mathbb{R}^*$;

b) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+x}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$, $x\in\mathbb{R}-\{-2,-1,0,2\}$;

c) $\dfrac{x+3}{x-1}:\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-1}$, $x\in\mathbb{R}-\{-3,-1,1\}$;

d) $\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^5\cdot\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^{-3}:\dfrac{x^2-1}{x^2+10x+25}$, $x\in\mathbb{R}-\{-5,-1,1\}$.

*Soluție:* a) $\dfrac{2x+3}{x}\cdot\dfrac{x-1}{2x}=\dfrac{(2x+3)(x-1)}{2x^2}=\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2}$;

b) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+x}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^2-4}=\dfrac{(x-2)^2}{x(x+1)}\cdot\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{(x-2)(x-1)}{x(x+2)}=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x}$;

c) $\dfrac{x+3}{x-1}:\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-1}=\dfrac{x+3}{x-1}\cdot\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+3)^2}=\dfrac{x+1}{x+3}$;

d) $\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^5\cdot\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^{-3}:\dfrac{x^2-1}{x^2+10x+25}=\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^2\cdot\dfrac{(x+5)^2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x+1}{x-1}$.

## PROBLEME PROPUSE

Efectuați operațiile următoare, simplificând pe cât posibil rezultatul*.

**1.** a) $x\cdot\dfrac{x+1}{3}$; b) $\dfrac{x}{x+1}\cdot(x-2)$; c) $\dfrac{x+1}{2}\cdot\dfrac{x}{2x-3}$; d) $\dfrac{x+2}{x-1}\cdot\dfrac{x-2}{x+3}$.

**2.** a) $x^2\cdot\dfrac{x+1}{x}$; b) $x^3\cdot\dfrac{1}{x^5}$;

c) $(x+1)\cdot\dfrac{1}{x^2+2x+1}$; d) $\dfrac{x+2}{x-3}\cdot(x^2-9)$.

**3.** a) $\dfrac{2x^2}{3y}\cdot\dfrac{6y^2}{4x^4}$; b) $\dfrac{3x}{(x+1)^2}\cdot\dfrac{x+1}{x}$;

c) $\dfrac{x(x-1)}{x+2}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{x^2(x-1)}$; d) $\dfrac{x}{x+1}\cdot\dfrac{2x+2}{x+2}\cdot\dfrac{x+2}{x^2}$.

---

* Presupunem că literele aparţin unor mulţimi de numere reale pentru care toate calculele au sens.

# CAPITOLUL III
# FUNCȚII

## III.1. NOŢIUNEA DE FUNCŢIE

**O funcție** este un triplet $(A, B, f)$, unde $A$ și $B$ sunt mulțimi nevide, iar $f$ este o corespondență între elementele acestor mulțimi prin care *fiecărui* element din $A$ i se asociază *un singur* element din $B$. Scriem $f : A \to B$.

Mulțimea $A$ se numește **domeniul** (**de definiție** al) funcției, iar $B$ se numește **codomeniul** funcției. Relația $f(x) = y$ arată că valoarea funcției în $x \in A$ este $y \in B$; $f$ se numește **legea de corespondență** a funcției și poate fi dată **sintetic** (prin descriere-text, diagrame, tabele etc.) sau **analitic** (printr-o formulă).

Două funcții se numesc **egale** dacă au același domeniu, același codomeniu și aceeași lege de corespondență.

Dacă $f : A \to B$ este o funcție, atunci **mulțimea valorilor** (**imaginea**) lui $f$ este:

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B.$$

### PROBLEME REZOLVATE

**1.** a) Se consideră șirul de numere naturale 2, 5, 8, 11, 14, … și funcția $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n - 1$. Arătați că primii cinci termeni ai șirului sunt $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$. Care este al 100-lea termen al șirului? Dar la 1234-lea?

b) Se consideră șirul de numere naturale 0, 3, 8, 15, 24, … . Identificați o funcție $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, astfel încât primii cinci termeni ai șirului să fie $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$. Care este al 100-lea termen al șirului?

*Soluție:* a) Avem $f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$, $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 14$, $f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 8$, $f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$, $f(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14$. Al 100-lea termen al șirului este $f(100) = 3 \cdot 100 - 1 = 299$, iar al 1234-lea este $3 \cdot 1234 - 1 = 3701$.

b) Funcția $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, $g(n) = n^2 - 1$ are proprietatea că $g(1) = 1^2 - 1 = 0$, $g(2) = 2^2 - 1 = 3$, $g(3) = 3^2 - 1 = 8$, $g(4) = 4^2 - 1 = 15$ și $g(5) = 5^2 - 1 = 24$. Al 100-lea termen al șirului este $g(100) = 100^2 - 1 = 9999$.

**2.** Considerăm funcția $f$ care asociază fiecărui număr natural $n$ – ultima cifră din scrierea zecimală a numărului $3^n$. Determinați domeniul de definiție al funcției $f$, precum și codomeniul său, știind că acesta din urmă are cardinalul minim posibil.

*Soluție:* Este clar că domeniul de definiție este mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale.

Deoarece $u(3^{4k}) = u(81^k) = 1$, rezultă că $u(3^{4k+1}) = 3$, $u(3^{4k+2}) = 9$ și $u(3^{4k+3}) = 7$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Din teorema împărțirii cu rest, orice număr natural se scrie sub una din formele $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ sau $4k + 3$. În concluzie, codomeniul (minimal) este $\{1, 3, 7, 9\}$.

**3.** Un robinet umple cu apă un rezervor având capacitatea de 1000 $\ell$. Volumul de apă, în litri, care se află în rezervor la un moment dat este direct proporțional cu timpul scurs de la deschiderea robinetului, în minute, raportul de proporționalitate fiind egal cu 10. Determinați funcția care dă volumul de apă din rezervor.

*Soluție:* Notăm cu $\mathcal{V}$ volumul de apă, în litri, care se află în rezervor la un moment dat și cu $t$ timpul scurs de la deschiderea robinetului, în minute. Din enunț știm că $\frac{\mathcal{V}}{t} =$ $= 10$, prin urmare $\mathcal{V} = 10t$. Observăm și că $t_{max} = 100$, pentru că rezervorul se umple după 100 de minute. Funcția cerută de problemă este $\mathcal{V}: [0, 100] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{V}(t) = 10t$.

## PROBLEME PROPUSE

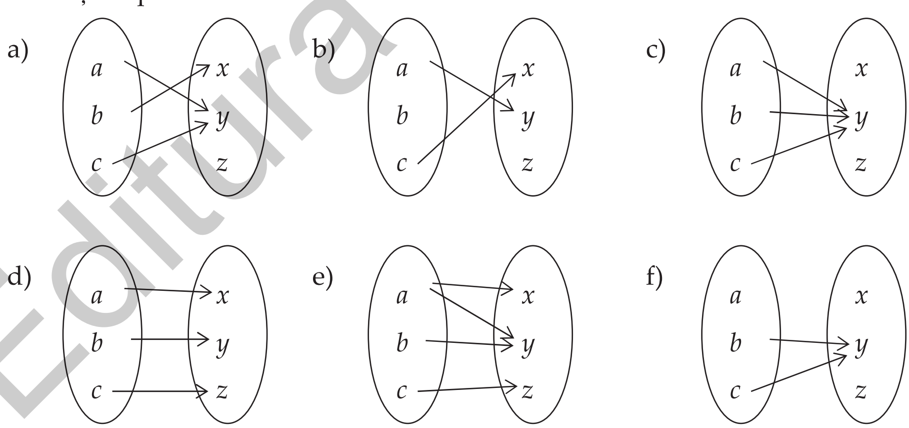
**1.** Considerăm $A$ = mulțimea județelor României; $B$ = mulțimea orașelor din România.

a) Corespondența $f: A \to B$, care asociază fiecărui județ orașele din acel județ, definește o funcție?

b) Corespondența $g: A \to B$, care asociază fiecărui județ reședința sa, definește o funcție? Aflați $g$(Argeș), $g$(Cluj), $g$(Maramureș), $g$(Vrancea).

c) Corespondența $h: B \to A$ care asociază fiecărui oraș județul în care se află, definește o funcție? Aflați $h$(Bârlad); $h$(Huși); $h$(Petroșani); $h$(Deva); $h$(Orăștie).

**2.** În care dintre diagramele de mai jos este reprezentată o funcție și în care nu? Justificați răspunsul!




**3.** Pentru fiecare dintre următoarele funcții, precizați domeniul de definiție și codomeniul:

# CAPITOLUL IV
# ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

## IV.1. PUNCTE. DREPTE. PLANE

**1. Punctul**, **dreapta** și **planul** sunt noțiunile fundamentale (de bază) ale geometriei în spațiu. Ele sunt noțiuni abstracte (nu există în realitatea concretă, ci doar în imaginația noastră) și primare (nu depind de alte noțiuni cunoscute, înțelegerea lor întemeindu-se pe intuiție, pe comparație și pe transpunerea în viața practică).

Punctul ni-l imaginăm ca fiind urma lăsată pe o foaie de hârtie de un creion ascuțit. Punctul nu are dimensiuni, nu poate fi confundat cu o bulină.

Dreapta este comparabilă cu un fir de ață bine întins, imaginat ca nesfârșit de lung, dar, spre deosebire de acesta, nu are grosime. Dreapta este o mulțime de puncte.

Planul este comparabil cu suprafața unei mese, nemărginită în toate direcțiile. Planul nu are grosime, conține drepte și este o mulțime de puncte.

În figura 1 sunt desenate un punct $A$, o dreaptă $d$ și un plan $\alpha$.


*Fig. 1*

De obicei, notăm punctele cu litere mari și dreptele cu litere mici din alfabetul latin, iar planele cu litere mici din alfabetul grec.

Planul, deși este nemărginit, îl reprezentăm printr-o porțiune dreptunghiulară a sa care, în perspectivă, va apărea ca un paralelogram.

**2. Propoziții despre puncte, drepte, plane**

**P1.** Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una; orice dreaptă conține cel puțin două puncte.

Dacă punctele distincte $A$ și $B$ aparțin dreptei $d$, atunci notăm dreapta $d$ cu $AB$ sau $BA$:

$A, B \in d, A \neq B \Rightarrow d = AB = BA$.

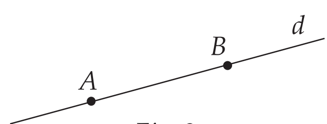



*Fig. 2*

Spunem că două puncte distincte **determină** o dreaptă.

În figura 3, punctele distincte $A$, $B$, $C$ aparțin dreptei $d$, iar punctul $D$ nu aparține dreptei $d$.

Avem: $A, B, C \in d$, $D \notin d$; $d = AB$, $d = AC$ etc.

Punctele $A$, $B$, $C$ sunt coliniare, iar punctele $A$, $B$, $D$ sunt necoliniare.

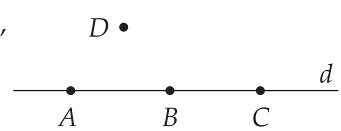



*Fig. 3*

**P2.** Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă și numai una la dreapta dată (**Axioma lui Euclid sau axioma paralelelor**). Acceptăm deci, implicit, că două drepte paralele sunt în același plan.

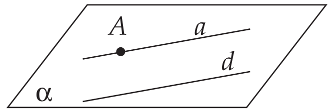


*Fig. 4*

Dacă $A \notin d$, există o unică dreaptă $a$, astfel încât $A \in a$ și $a \parallel d$; dreptele $a$ și $d$ se află în același plan (figura 4).

**P3.** Fiind date trei puncte necoliniare, există un plan și numai unul care să le conțină; într-un plan există cel puțin trei puncte necoliniare.

Dacă punctele necoliniare $A$, $B$, $C$ aparțin planului α, atunci notăm planul α cu $(ABC)$ sau $(ACB)$ sau $(BAC)$ etc.

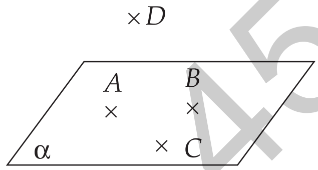


*Fig. 5*

Spunem că trei puncte necoliniare **determină** un plan.

În figura 5, punctele necoliniare $A$, $B$, $C$ aparțin planului α, iar punctul $D$ nu aparține planului α.

Avem $A, B, C \in \alpha$, $D \notin \alpha$; $\alpha = (ABC)$, $\alpha = (ACB)$, $\alpha = (BAC)$ etc.

Spunem că punctele $A$, $B$, $C$ sunt **coplanare**, iar punctele $A$, $B$, $C$, $D$ sunt **necoplanare**.

**P4.** Dacă două puncte distincte aparțin unui plan, atunci dreapta determinată de ele este inclusă în acel plan.

$A, B \in \alpha$, $A \neq B \Rightarrow AB \subset \alpha$ (figura 6).

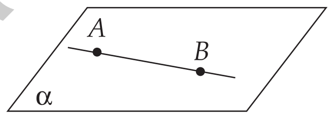


*Fig. 6*

**P5.** Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci intersecția lor este o dreaptă.

$A \in \alpha \cap \beta$, $\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = d$ $(A \in d)$ (figura 7).

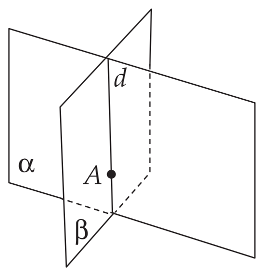


*Fig. 7*

### 3. Determinarea planului

**I.** Trei puncte necoliniare determină un plan.

Dacă $A$, $B$, $C$ sunt necoliniare și $A, B, C \in \alpha$, atunci $\alpha = (ABC)$ (figura 8).

**II.** O dreaptă și un punct exterior ei determină un plan.

Dacă $A \notin d$ și $A \in \alpha$, $d \subset \alpha$, atunci $\alpha = (A, d)$ (figura 9).

**III.** Două drepte concurente determină un plan.

Dacă $a \cap b = \{O\}$ și $a, b \subset \alpha$, atunci $\alpha = (a, b)$ (figura 10).

**IV.** Două drepte paralele determină un plan.

Dacă $a \parallel b$ și $a, b \subset \alpha$, atunci $\alpha = (a, b)$ (figura 11).

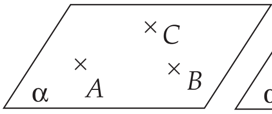


*Fig. 8*

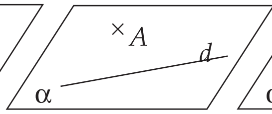


*Fig. 9*

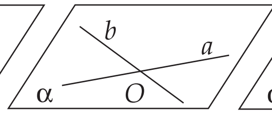


*Fig. 10*

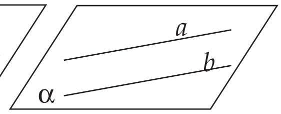
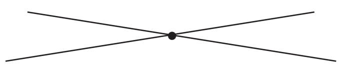


*Fig. 11*

### 4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu

Știm deja că, în plan, două drepte distincte pot fi concurente sau paralele.

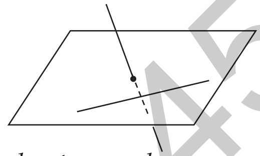
În spațiu, există drepte care, deși nu sunt paralele, nu au niciun punct comun (de exemplu, un om care stă drept, în mijlocul unei camere, având podeaua dreptunghiulară, ar putea sugera o dreaptă care nu este nici paralelă, nici nu are vreun punct comun cu una dintre marginile podelei). Două astfel de drepte se numesc necoplanare. Prin urmare, în spațiu, două drepte distincte pot fi: concurente, paralele sau necoplanare.



*drepte concurente*



*drepte paralele*



*drepte necoplanare*

Reamintim că două drepte concurente sau paralele sunt coplanare.

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** În figura 12 este reprezentat un plan α, trei puncte necoliniare, *A*, *B*, *C*, ce aparțin planului α și un punct *D*, exterior planului.

a) Stabiliți poziția dreptei *AB* față de planul α.

b) Arătați că punctele *A*, *B*, *D* determină un plan și găsiți intersecția acestuia cu planul α.

c) Care este poziția relativă a dreptelor *AD* și *BC*?

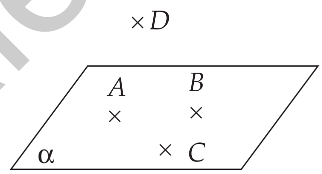



*Fig. 12*

*Soluție:* a) Deoarece punctele *A* și *B* sunt diferite și aparțin planului α, rezultă, conform propoziției P4, că dreapta *AB* este inclusă în planul α.

b) Punctele *A*, *B*, *D* sunt necoliniare, deoarece, în caz contrar, din relațiile $D \in AB$ și $AB \subset \alpha$, am obține $D \in \alpha$, fals. Așadar, punctele *A*, *B*, *D* determină un plan și $(ABD) \cap \alpha = AB$.

c) Dreptele *AD* și *BC* nu pot fi paralele sau concurente, pentru că atunci ele ar fi coplanare și asta ar însemna că *D* aparține planului α, ceea ce este fals. Prin urmare, dreptele *AD* și *BC* sunt necoplanare.

**2.** Fie *A*, *B*, *C*, *D* patru puncte necoplanare (figura 13).

a) Demonstrați că oricare trei dintre aceste puncte sunt necoliniare.

b) Câte plane, care conțin cel puțin trei dintre punctele *A*, *B*, *C*, *D* există?

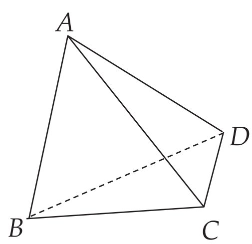



*Fig. 13*

*Soluție:* a) În primul rând, observăm că punctele *A*, *B*, *C*, *D* trebuie să fie distincte, căci, în caz contrar, ele ar fi coplanare. Dacă, de exemplu, *A*, *B*, *C* ar fi coliniare, atunci dreapta determinată de ele și punctul *D* ar aparține unui plan, deci punctele *A*, *B*, *C*, *D* ar fi

coplanare, fals. Prin urmare, punctele $A$, $B$, $C$, $D$ sunt coplanare.
b) Sunt patru plane: $(ABC)$, $(ABD)$, $(ACD)$ și $(BCD)$.

**3.** Considerăm patru puncte necoplanare $A$, $B$, $C$, $D$. Fie $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (AD)$ și $\{E\} = MN \cap BC$, $\{F\} = NP \cap CD$, $\{G\} = MP \cap BD$ (figura 14). Demonstrați că punctele $E$, $F$ și $G$ sunt coliniare.

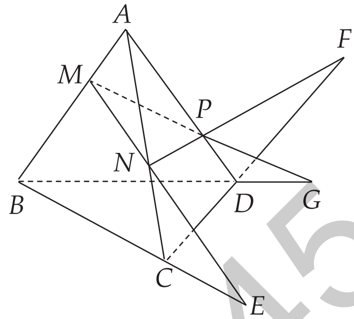


*Fig. 14*

*Soluție:* Fie $d$ dreapta de intersecție a planelor $(BCD)$ și $(MNP)$. Cum $E \in BC$ și $BC \subset (BCD)$, rezultă că $E \in (BCD)$. Din relațiile $E \in MN$ și $MN \subset (MNP)$, deducem că $E \in (MNP)$. Așadar $E \in d = (BCD) \cap (MNP)$. Analog arătăm că $F$ și $G$ aparțin dreptei $d$. Prin urmare, punctele $E$, $F$ și $G$ sunt coliniare, pentru că toate se află pe dreapta $d$.

## Probleme propuse

**1.** Fie $A$, $B$, $C$, $D$ patru puncte necoplanare astfel încât $AB = AC = AD = BC = CD = DB$. Calculați $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB$.

**2.** În figura 15, punctele $B$ și $C$ aparțin planului $\alpha$, iar punctul $A$ nu aparține planului $\alpha$. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

$P_1$: $BC \subset \alpha$; $P_2$: $AB \subset \alpha$; $P_3$: punctele $A$, $B$, $C$ determină un plan.

**3.** În figura 16, punctele necoliniare $A$, $B$, $O$ aparțin planului $\alpha$, punctul $C$ este exterior planului $\alpha$ și punctul $O$ se află pe segmentul $(CD)$.

a) Stabiliți poziția relativă a dreptelor $AB$ și $CD$ și poziția punctului $D$ față de planul $\alpha$.

b) Determinați $(ABC) \cap \alpha$.

c) Determinați $(ACD) \cap (BOC)$.

**4.** În figura 17, dreptele $a$ și $b$ sunt paralele și $A, B \in a$, $C, D \in b$, $AC \cap BD = \{O\}$, iar punctul $P$ nu aparține planului determinat de dreapta $a$ și punctul $C$. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

$P_1$: $O$ aparține planului $(a, b)$, determinat de dreptele $a$ și $b$;

$P_2$: $P \in (a, b)$; $P_3$: $(PAC) \cap (PBD) = PO$;

$P_4$: Intersecția planelor $(PAB)$ și $(PCD)$ este o dreaptă.

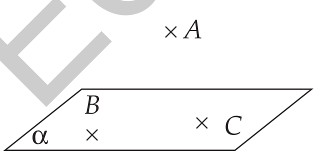


*Fig. 15*

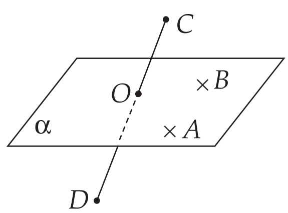


*Fig. 16*

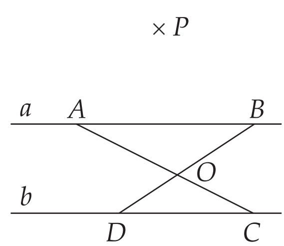
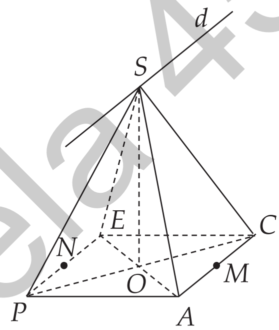


*Fig. 17*

# CAPITOLUL V
# ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

## V.1. CALCULUL UNOR DISTANŢE ŞI A UNOR MĂSURI DE UNGHIURI ÎN CORPURILE STUDIATE

### PROBLEME REZOLVATE




**1.** Piramida patrulateră regulată *SPACE* are toate muchiile de lungime $a$, $a > 0$.

a) Aflați măsura unghiului format de dreapta *SP* cu planul (*SAE*).

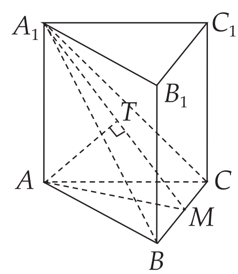
b) Calculați distanța de la punctul *A* la planul (*SPE*).

c) Determinați sinusul unghiului format de planele (*SAC*) și (*SPE*).

*Soluție:* a) Deoarece $\text{pr}_{(SAE)} PS = OS$, rezultă că $\sphericalangle(SP, (SAE)) = \sphericalangle PSO$, unde *O* este centrul bazei. Întrucât *PACE* este pătrat, rezultă că $PO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ și atunci, din triunghiul *POS*, $\sphericalangle O = 90°$, obținem că măsura unghiului *PSO* este egală cu 45°.

b) Fie *M*, *N* mijloacele segmentelor *AC*, respectiv *PE*. Avem $AC \parallel (SPE)$, deci $d(A, (SPE)) = d(M, (SPE))$. Construim $MQ \perp SN$, $Q \in SN$. Ținând cont că $PE \perp SN$ și $PE \perp MN$, rezultă că $PE \perp (SMN)$, deci $PE \perp MQ$. Așadar, $MQ \perp SN$, $MQ \perp PE$, deci $MQ \perp (SPE)$, iar $d(M, (SPE)) = MQ$. Din triunghiul *SMN* va rezulta $\frac{MN \cdot SO}{2} = \frac{MQ \cdot SN}{2}$, deci $MQ = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

c) Fie $d = (SPE) \cap (SAC)$. Deoarece $AC \parallel PE$, rezultă că $d \parallel AC \parallel PE$. Întrucât triunghiurile *SAC* și *SPE* sunt echilaterale, rezultă că $SM \perp AC$, $SN \perp PE$, deci unghiul dintre planele (*SAC*) și (*SPE*) este unghiul *MSN*. Din triunghiul *MSN*, exprimând aria în două moduri, vom obține că $\sin(\sphericalangle MSN) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.




**2.** În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ având $AB = 6$ cm și $AA_1 = 6\sqrt{3}$ cm.

a) Aflați distanța de la punctul $A_1$ la dreapta *BC*.

b) Aflați distanța de la punctul *A* la planul $(A_1BC)$.

c) Aflați măsura unghiului dintre dreptele $AB_1$ și $CC_1$.

*Soluție:* a) Fie $M$ mijlocul laturii $BC$. Cum $AA_1 \perp (ABC)$, $BC$ este inclusă în planul $(ABC)$ și $AM \perp BC$, rezultă că $A_1M \perp BC$, deci $d(A_1, BC) = A_1M$. Din triunghiul $A_1AM$, $\sphericalangle A_1AM = 90°$ rezultă, conform teoremei lui Pitagora, că $A_1A = 3\sqrt{15}$ cm.

b) Construim $AT \perp A_1M$, $T \in A_1M$. Întrucât $AT \perp A_1M$, $A_1M \perp BC$ și $BC \perp AM$, vom obține, conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare că $AT \perp (A_1BC)$, deci $d(A, (A_1BC)) = AT$. Exprimând în două moduri aria triunghiului $A_1AM$, obținem $AT = \dfrac{AA_1 \cdot AM}{A_1M} = \dfrac{6\sqrt{15}}{5}$ cm.

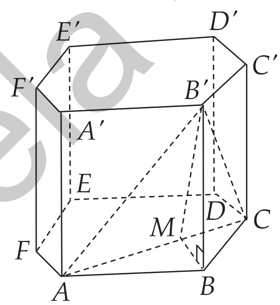
c) Cum $CC_1 \parallel BB_1$, deducem că $\sphericalangle(AB_1, CC_1) = \sphericalangle(AB_1, BB_1) = \sphericalangle AB_1B$. Din triunghiul $ABB_1$, $\sphericalangle ABB_1 = 90°$, se obține că $\sphericalangle AB_1B = 30°$.

**3.** În figura alăturată este reprezentată prisma hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ în care $AB = AA' = 2$ cm.

a) Aflați lungimea segmentului $AC'$.

b) Aflați măsura unghiului dintre dreptele $E'D'$ și $AC$.

c) Aflați tangenta unghiului diedru format de planele $(B'AC)$ și $(ABC)$.




*Soluție:* a) Întrucât $CC' \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC)$, rezultă că $CC' \perp AC$, deci triunghiul $ACC'$ are $\sphericalangle C = 90°$. Conform teoremei lui Pitagora, $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = 16$ cm, deci $AC' = 4$ cm.

b) Deoarece $AB \parallel E'D'$, rezultă că $\sphericalangle(E'D', AC) = \sphericalangle(AB, AC) = \sphericalangle BAC$. Din triunghiul $ABC$, cu $AB = BC = 2$ cm și $\sphericalangle ABC = 120°$, rezultă că $\sphericalangle BAC = 30°$.

c) Fie $M$ mijlocul segmentului $AC$. Întrucât $AB = BC$ și $AM = MC$, rezultă că $BM \perp AC$. Cum $B'A = B'C$ și $AM = MC$, rezultă că $B'M \perp AC$. Ținând cont că $(B'AC) \cap (ABC) = AC$, $BM \perp AC$, $BM \subset (ABC)$, $B'M \perp AC$, $B'M \subset (B'AC)$, deducem că $\sphericalangle((B'AC), (ABC)) = \sphericalangle B'MB$. Din triunghiul $B'BM$, $\sphericalangle B = 90°$, obținem $\operatorname{tg}(\sphericalangle B'MB) = 2$.

## PROBLEME PROPUSE

**1.** În figura 1, $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată în care $AB = 2\sqrt{3}$ cm și $AA' = 2$ cm. Fie $M$ punctul de intersecție a dreptelor $A'C'$ și $B'D'$ și $N$ punctul de intersecție a dreptelor $AD'$ și $DA'$.

a) Aflați lungimea segmentului $MN$.

b) Găsiți măsura unghiului format de dreptele $MN$ și $D'C$.

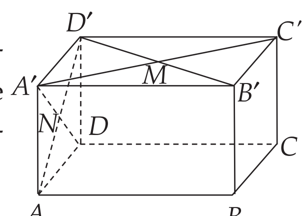



*Fig. 1*

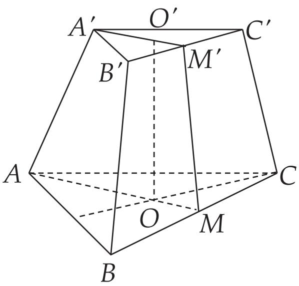
**2.** Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată în care $AB = 24$ cm, iar măsura unghiului dintre dreapta $AC'$ și planul $(BCC')$ este egală cu $30°$.

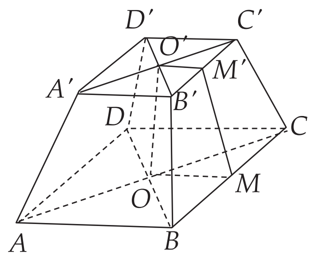
a) Aflați distanța de la punctul $D'$ la dreapta $AC$.

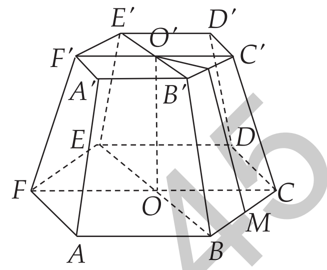
b) Determinați distanța de la punctul $D$ la planul $(ACD')$.

## V.4. TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ

### Convenții de desen




**Trunchiul de piramidă regulată** se obține în urma secționării unei piramide regulate cu un plan paralel cu baza, eliminând piramida ce se formează în vârf. Înălțimea unui astfel de trunchi unește centrele celor două baze.

**Notații:** $MM' = a$ – apotema trunchiului;
$OO' = h$ – înălțimea trunchiului.

**Observație:** Remarcăm că în notațiile indicate $a$ și $h$ nu reprezintă apotema, respectiv înălțimea piramidei mici formate.

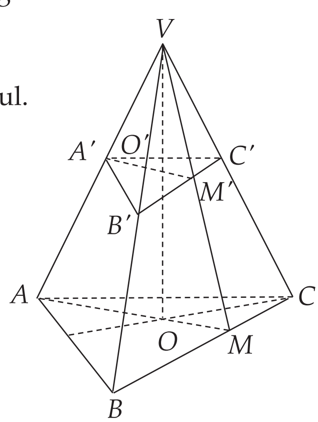
**Aria și volumul unui trunchi de piramidă regulată**

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b;\ \mathcal{A}_l = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b)\cdot a}{2};\ \mathcal{V} = \frac{h}{3}\cdot\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B\cdot\mathcal{A}_b}\right)$$

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Se consideră trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu muchiile bazelor $AB = 8$ cm, $A'B' = 6$ cm și înălțimea $OO' = 4$ cm.

a) Calculați volumul trunchiului.
b) Aflați volumul piramidei din care provine trunchiul.
c) Determinați aria totală a trunchiului.




*Soluție:* a) Folosind formula, obținem că:

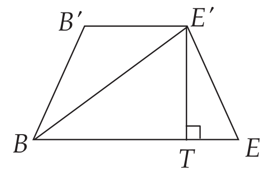
$$\mathcal{V}_{\text{tr.}} = \frac{OO'}{3}\left(\mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{A'B'C'} + \sqrt{\mathcal{A}_{ABC}\cdot\mathcal{A}_{A'B'C'}}\right) =$$

$$= \frac{OO'}{3}\left(\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} + \frac{A'B'^2\sqrt{3}}{4} + \frac{AB\cdot A'B'\cdot\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\left(16\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 12\sqrt{3}\right) = \frac{148\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3.$$

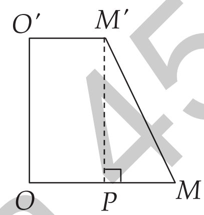
b) Din asemănarea piramidei $VA'B'C'$ cu piramida mare $VABC$, obținem că $\frac{\mathcal{V}_{\text{pir. mică}}}{\mathcal{V}_{\text{pir. mare}}} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^3 = \frac{27}{64}$. Atunci $\frac{\mathcal{V}_{\text{tr.}}}{\mathcal{V}_{\text{pir. mare}}} = \frac{64-27}{64} = \frac{37}{64}$, de unde $\mathcal{V}_{\text{pir. mare}} = \frac{256\sqrt{3}}{3}$ cm$^3$.

$TE = \dfrac{BE - B'E'}{2} =$ 8 cm, deci $BT$ = 12 cm și, conform teoremei lui Pitagora, $E'T = \sqrt{BE'^2 - BT^2} = 6$ cm. Așadar, $OO' = 6$ cm.




b) $\mathcal{V}_{\text{tr.}} = \dfrac{OO'}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}\right) = \dfrac{OO'}{3}\left(6 \cdot \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \dfrac{A'B'^2\sqrt{3}}{4} + \right.$ $\left. + \ 6 \cdot \dfrac{AB \cdot A'B'\sqrt{3}}{4}\right) = 372\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

c) Fie $M$ mijlocul $CD$ și $M'$ mijlocul $C'D'$. Deoarece triunghiurile $COD$ și $C'O'D'$ sunt echilaterale, rezultă că $OM = 5\sqrt{3}$ cm și $O'M' = \sqrt{3}$. Dacă $M'P \perp OM$, $P \in OM$, atunci $MM' = 2\sqrt{21}$ cm. În concluzie, $\mathcal{A}_{l\,\text{tr.}} = \dfrac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot MM'}{2} = 72\sqrt{21}\ \text{cm}^2$.




## PROBLEME PROPUSE

**1.** O piramidă patrulateră regulată are toate muchiile de lungime 8 cm. Secționăm piramida cu un plan paralel cu baza, care trece prin mijlocul înălțimii. Calculați aria totală și volumul trunchiului de piramidă care se obține.

**2.** Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu muchiile bazelor $AB = 18$ cm, $A'B' = 6$ cm și având înălțimea $OO' = 6\sqrt{3}$ cm. Calculați aria laterală și volumul trunchiului.

**3.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are laturile bazelor $AB = 12$ cm, $A'B' = 4$ cm și apotema $MM' = 12$ cm. Calculați:

a) aria laterală și volumul trunchiului;

b) înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

**4.** Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată în care $AA' = A'B' = 6$ cm. Muchia laterală $AA'$ formează cu planul bazei $(ABC)$ un unghi cu măsura de 45°. Calculați volumul trunchiului.

**5.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are înălțimea $OO' = 6$ cm, latura bazei mari $AB = 12$ cm și volumul $\mathcal{V} = 378\ \text{cm}^3$.

a) Arătați că $A'B' = 3$ cm.

b) Calculați aria laterală a trunchiului.

**6.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are centrele bazelor $O$, respectiv $O'$. Se știe că $AA' \perp OA'$, $OA' = 6$ cm și $AO = 6\sqrt{3}$ cm. Calculați volumul trunchiului.

**7.** O firmă construiește din beton postamentul pentru amplasarea unei statui sub forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Dacă lungimea muchiei laterale

# CAPITOLUL VI
# RECAPITULAREA MATERIEI DIN CLASELE V-VII

## VI.1. NUMERE NATURALE

**1.** Determinați:

a) numărul cu 3 mai mare decât 9;
b) numărul cu 3 mai mic decât 9;
c) numărul de 3 ori mai mare decât 9;
d) numărul de 3 ori mai mic decât 9.

**2.** Calculați:

a) $10 - 2 \cdot 4$;
b) $4005 : 15$;
c) $54 : 3^2 + 11$;
d) $18 - (10 - 8 : 2) \cdot 3$;
e) $20 - 14 \cdot (18 - 9 \cdot 2)$;
f) $222 - 22 \cdot 2 - 22 : 2$.

**3.** Considerăm numerele $a$, $b$, $c$, $d$ astfel încât $a = 5$, $b - c = 2$ și $d = (2^{11} \cdot 20^{31})^2 : (4^{41} \cdot 10^{62})$.

a) Arătați că $d = 4$.
b) Calculați $a^2 + ab - ac - d^2$.

**4.** Calculați:

a) $(2^{100} + 2^{101} + 2^{102}) : 2^{100}$;
b) $2^5 \cdot 3^6 : 6^4$;
c) $16^4 : (2 \cdot 4^2 \cdot 8^3)$;
d) $9^4 : (3^6 + 8 \cdot 3^5 - 6 \cdot 3^4)$.

**5.** Determinați:

a) cel mai mare pătrat perfect mai mic decât 2020;
b) cel mai mic cub perfect mai mare decât 2020.

**6.** Determinați numerele de forma $\overline{25a}$ divizibile cu 2, dar care nu se divid cu 3.

**7.** Determinați numerele $\overline{a7b}$ divizibile cu 5 și cu 9.

**8.** Determinați numerele naturale $a$ și $b$, știind că cel mai mare divizor comun al numerelor este 13, iar $17a + b = 351$.

**9.** Fie $a$, $b$, $c$ cifre nenule, diferite două câte două, și $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$.

a) Arătați că numărul $S$ este divizibil cu 37.
b) Determinați $S$, știind că este număr natural de trei cifre.

**10.** Determinați numerele naturale $n$, știind că $3n + 1$ îl divide pe 70.

**11.** Arătați că numărul $a = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{24}$ se divide cu 42.

**12.** Arătați că numărul $a = 2^{2n} \cdot 7^{n+2} - 28^{n+1} - 4^n \cdot 7^{n+1}$ se divide cu 392 pentru orice număr natural nenul $n$.

## VI.5. FIGURI GEOMETRICE PLANE

**1.** Pe o dreaptă se consideră punctele $A$, $B$, $C$, $D$, în această ordine, astfel încât $AD =$ $= 15$ cm, $BC = 3$ cm și $AB = CD$. Calculați lungimea segmentului $AB$.

**2.** Punctul $M$ este mijlocul segmentului $AB$ și punctul $P$ este mijlocul segmentului $AM$. Calculați valoarea raportului $\frac{PB}{AM}$.

**3.** Pe o dreaptă se consideră punctele $A$, $B$, $C$, $D$, în această ordine, iar $M$ și $N$ sunt mijloacele segmentelor $BC$, respectiv $CD$. Se știe că $MN = 3$ cm, $AN = 7$ cm și $BN =$ $= 4$ cm. Calculați lungimile segmentelor $AB$, $BC$ și $CD$.

**4.** Raportul dintre măsura complementului unui unghi și măsura suplementului aceluiași unghi este $\frac{2}{5}$. Aflați măsura unghiului.

**5.** Un unghi are măsura de $72°30'$.
a) Aflați măsura complementului unghiului dat.
b) Aflați măsura suplementului unghiului dat.

**6.** Pe dreapta $AB$ considerăm punctul $O$, între $A$ și $B$. Punctele $C$ și $D$ sunt de o parte și de alta a dreptei $AB$, astfel încât $\sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle AOD$. Arătați că punctele $D$, $O$, $C$ sunt coliniare.

**7.** I. Fie $d$, $a$ și $b$ trei drepte în plan.
a) Dacă $a \parallel b$ și $a \perp d$, atunci $b \perp d$.
b) Dacă $a \perp d$ și $b \perp d$, atunci $a \parallel b$.
II. Fie $a$, $b$, $a'$ și $b'$ patru drepte în plan astfel încât $a \perp b$ și $a' \parallel a$, $b' \parallel b$. Atunci $a' \perp b'$.

**8.** În triunghiul $ABC$ avem $\sphericalangle B = 65°$ și $\sphericalangle C = 45°$. Determinați măsura unghiului format de înălțimea din $A$ și bisectoarea unghiului $A$.

**9.** Considerăm triunghiul dreptunghic $ABC$, $\sphericalangle BAC = 90°$, și $CD$ bisectoarea unghiului $ACB$, $D \in AB$. Știind că $AD = 3$ cm, calculați distanța de la $D$ la $BC$.

**10.** Considerăm triunghiul $ABC$ și $AD$, $D \in AB$, bisectoarea unghiului $BAC$. Punctele $E$ și $F$ sunt proiecțiile lui $D$ pe $AB$, respectiv $AC$. Demonstrați că $AD$ este mediatoarea segmentului $EF$.

**11.** Fie $ABC$ un triunghi echilateral și $D$ simetricul punctului $B$ față de punctul $C$. Arătați că triunghiul $ABD$ este dreptunghic.

**12.** Triunghiurile isoscele $ABC$ și $DBC$ au baza comună $BC$. Demonstrați că $AD \perp BC$.

**13.** Considerăm triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$.
a) Determinați poziția ortocentrului triunghiului $ABC$.
b) Determinați poziția centrului cercului circumscris triunghiului $ABC$.

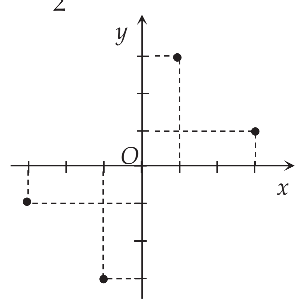
# INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

## TESTE INIȚIALE

**Testul 1.** **I. 1.** B. **2.** C. **3.** D. **4.** D. **5.** C. **6.** B. **7.** A. **8.** D. **II. 1.** $a = 2$, $b = \frac{3}{4}$, $m_g = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **2.** 5%. **3.** $b = 8$ cm, $(B - b) : 2 = 2$ cm. **4.** a) Conform teoremei înălțimii, $AD^2 = BD \cdot DC$. Obținem că $CD = 6$ cm, $BD = 12$ cm, deci $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} = 54\sqrt{2}$ cm$^2$; b) Cu teorema catetei, $AB = 6\sqrt{6}$ cm și $AC = 6\sqrt{3}$ cm. Din triunghiul $EAC$, $\sphericalangle A = 90°$, conform teoremei lui Pitagora, $CE = 9\sqrt{2}$ cm. Deoarece $DE$ este mediană corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul $ADB$, obținem $DE = 3\sqrt{6}$ cm. Așadar, perimetrul triunghiului $CDE$ este $3\left(\sqrt{6}+2+3\sqrt{2}\right)$ cm.

**Testul 2.** **I. 1.** B. **2.** A. **3.** C. **4.** C. **5.** A. **6.** D. **7.** B. **8.** C. **II. 1.** $x = 3$, $y = 1$, $z = 5$, $m_a = 3$. **2.** $7m + 5d = 41$ și $d = m + 1$, de unde $m = 3$, $d = 4$. **3.** $AB = AC = 3$. **4.** a) Fie $D$ mijlocul laturii $BC$. Triunghiul $ABC$ este isoscel, deci $AD \perp BC$. Din triunghiul $ABD$ obținem $AD = 15$ cm, deci $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} = 180$ cm$^2$; b) Fie $G$ punctul de intersecție a medianelor $AD$ și $BM$. Din triunghiul $BGD$, $\sphericalangle D = 90°$, obținem că $BG = 13$ cm, prin urmare $BM = 19{,}5$ cm.

**Testul 3.** **I. 1.** C. **2.** B. **3.** D. **4.** A. **5.** D. **6.** B. **7.** B. **8.** A. **II. 1.** $x = \frac{7}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $\sqrt{x+y} = 2$. **2.** Orice modul este nenegativ, deci $x - y + 1 = 0$ și $x + 2y - 1 = 0$, de unde $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$. **3.** $M = \{(-3, -1), (-1, -3), (1, 3), (3, 1)\}$. Reprezentarea este realizată în figura alăturată. **4.** a) $\mathcal{A}_{DPQC} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{DAP} - \mathcal{A}_{BPQ} = 40\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 26\sqrt{3}$; b) $\operatorname{tg}(\sphericalangle APD) = \frac{AD}{AP} = \sqrt{3}$, deci $\sphericalangle APD = 60°$. Apoi, $\operatorname{tg}(\sphericalangle BPQ) = \frac{BQ}{BP} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, deci $\sphericalangle BPQ = 30°$. Rezultă că $\sphericalangle DPQ = 180° - \sphericalangle APD - \sphericalangle BPQ = 90°$.




**Testul 4.** **I. 1.** A. **2.** B. **3.** C. **4.** D. **5.** C. **6.** A. **7.** B. **8.** A. **II. 1.** $a = 25$, $b = 3$; $(8b - a)^{101} = (-1)^{101} = -1$. **2.** Dacă $p$ este prețul inițial, după a doua mărire devine $\frac{144p}{100}$. Astfel, $\frac{144p}{100} = 108$, de unde $p = 75$ lei. **3.** Raza cercului este jumătate din diagonala dreptunghiului, adică 13 cm. **4.** a) Dacă $AM = x$, atunci $AB = AC = 2x$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul $MAC$, obținem $5x^2 = 20$, deci $x = 2$. Atunci $AB = AC = 4$ cm, $BC = 4\sqrt{2}$ cm, deci $\mathcal{P}_{ABC} = 4 + 4 + 4\sqrt{2} = \left(8+4\sqrt{2}\right)$ cm; b) Triunghiul $ABC$ fiind isoscel, $AD$ este și mediană, deci punctul $G$ este centrul său de greutate. Folosind concurența medianelor într-un triunghi, punctele $B$, $G$ și mijlocul segmentului $AC$ sunt coliniare.

# ALGEBRĂ

## CAPITOLUL I. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAŢII ÎN $\mathbb{R}$

### I.1. Mulţimi definite cu ajutorul unei proprietăţi comune elementelor lor

**1.** $A = \{e, i, u\}$; $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $C = \{0, 1\}$; $D = \{2, 3, 5, 7\}$. **2.** a) $A = \{2, 5, 8\}$; b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 9\}$; c) $C = \{9\}$; d) $D = \{0, 4, 8\}$. **3.** a) $A \cup B = \{-2, 0, 1, 7\}$; b) $A \cap B = \{1\}$; c) $A \setminus B = \{-2, 7\}$; d) $A \times B = \{(-2, 0), (-2, 1), (1, 0), (1, 1), (7, 0), (7, 1)\}$. **4.** a) $A = \{1, 2, 3\}$; b) $B = \{-2, -1, 1, 2\}$; c) $C = \{-1, 1\}$; d) $D = \{3, 4\}$. **5.** a) $A = \{x \mid x$ este cifră pară$\}$; b) $B = \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$; c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 8\}$; d) $D = \left\{x \,\middle|\, x = \dfrac{k}{k+1}, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\right\}$. **6.** a) De exemplu, $\{-2, 2, 6\} \subset A$ și $\{0, 2, 4\} \subset B$; b) $200 \in B$, $200 \notin A$, $201 \notin A$, $201 \notin B$, $202 \in A$ și $202 \in B$; c) Dacă $x \in A$, atunci $x = 4k + 2 = 2(2k + 1)$, deci $x \in B$; $200 \in B$ și $200 \notin A$, deci $B \not\subset A$. **7.** a) $2018 = 3 \cdot 672 + 2$, deci $2018 \in C$, $2018 \notin A$, $2018 \notin B$; $2019 = 3 \cdot 673$, deci $2019 \in A$, $2019 \notin B$, $2019 \notin C$; $2020 = 3 \cdot 673 + 1$, deci $2020 \in B$, $2020 \notin A$, $2020 \notin C$; b) $A \cap B = \varnothing$; c) Deoarece $A \cup B \cup C \subset \mathbb{N}$ și orice $x \in \mathbb{N}$ se scrie sub una din formele $3k$, $3k + 1$ sau $3k + 2$, rezultă că $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$. **8.** a) $A = \{(3, 1), (2, 3), (1, 5), (0, 7)\}$; b) $B = \{(-2, -1), (-1, -2), (1, 2), (2, 1)\}$; c) $C = \{(1, -2)\}$. **9.** a) $|A| = 19$; b) $|B| = 11$; c) $|C| = 20$; d) $|D| = 45$. **10.** a) $A = \left\{0; \pi; 3\sqrt{2}; 0,(2)\right\}$; b) $B = \left\{3\sqrt{2}; \pi\right\}$; c) $C = \left\{0; -\dfrac{6}{2}\right\}$; d) $D = \left\{3\sqrt{2}\right\}$. **11.** a) $A = \{1, 2, 4\}$; b) $B = \{0, 2, 4\}$; c) $C = \{-5, -2, -1, 0, 1, 4\}$; d) $D = \{-6, -2, 0, 4\}$. **12.** $M = \{-4, -3, \ldots, 8, 9\}$; $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$; $B = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$; $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; $D = \{-4, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **13.** Se verifică $A \subset B$ și $B \subset A$. Dacă $x \in A$, rezultă că $x = 2k + 1 = 201 - 200 + 2k = 201 - 2(100 - k) = 201 - 2p$, iar $k \in \mathbb{Z}$ implică $p \in \mathbb{Z}$, deci $x \in B$ și, astfel, $A \subset B$. Analog se demonstrează că $B \subset A$. **14.** Fiecare mulțime conține câte un singur element, astfel: a) $P$ – mijlocul segmentului $BC$; b) $Q$ – centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$; c) $R$ este mediatoarea segmentului $AB$; d) $S$ – centrul cercului înscris în triunghiul $ABC$. **15.** a) $B_1$ este mulțimea acelor puncte având coordonatele egale. Toate aceste puncte sunt coliniare și formează o dreaptă, numită prima bisectoare (figura 1); b) $B_2$ este mulțimea acelor puncte având coordonatele opuse. Toate aceste puncte sunt coliniare și formează o dreaptă, numită a doua bisectoare (figura 2); c) $C$ este segmentul cu capetele $M_1(-1, -1)$ și $M_2(1, 1)$ (figura 3).

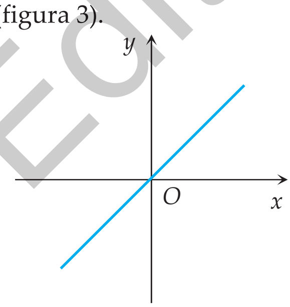


*Figura 1*

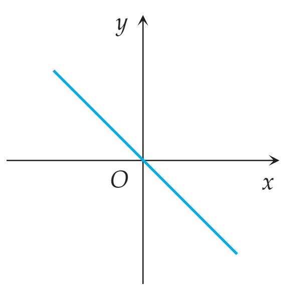


*Figura 2*

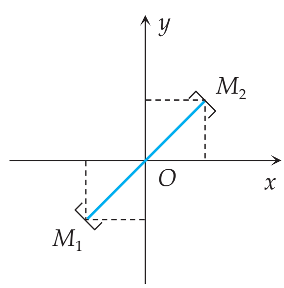


*Figura 3*

## Capitolul III. Funcţii

### III.1. Noţiunea de funcţie

**1.** a) Nu: unui județ îi corespund mai multe orașe; b) Da; $g$(Argeș) = Pitești; $g$(Cluj) = Cluj-Napoca; $g$(Maramureș) = Baia Mare; $g$(Vrancea) = Focșani; c) Da; $h$(Bârlad) = Vaslui; $h$(Huși) = Vaslui; $h$(Petroșani) = Hunedoara; $h$(Deva) = Hunedoara; $h$(Orăștie) = Hunedoara. **2.** a) Da; b) Nu; c) Da; d) Da; e) Nu; f) Nu. **3.** Notăm cu $A$ domeniul și cu $B$ codomeniul. a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$; b) $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$; c) $A$ = {□, ◇, ○}, $B$ = {△, ♡, ⏢}. **4.** a) $A = \{-1, 1, 2, 3\}$, $\operatorname{Im} f = \{a, b, c, d\}$, iar codomeniul poate fi orice mulțime $B$ care include $\{a, b, c, d\}$; b) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\operatorname{Im} f = \{0, 1, 4\}$, $B \supset \{0, 1, 4\}$. **5.** a) Domeniul este $\{-3, -2, 0, 1\}$, codomeniul este $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, iar imaginea este $\{-2, -1, 1, 2\}$; b) Domeniul este $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, codomeniul este $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, iar imaginea este $\{0, 1, 4\}$. **6.** a) $f: \{0, 1, 2, 3, 4\} \to B$, $f(x) = (-1)^{x+1}$; $\operatorname{Im} f = \{-1, 1\}$; $B$ poate fi orice mulțime care include $\operatorname{Im} f$; b) $f: \{0, 1, 2, 3, 4\} \to B$; $f(x) = 2x - 1$; $\operatorname{Im} f = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$; $B$ poate fi orice mulțime care include $\operatorname{Im} f$. **7.** a) $B = \{-1, 1, 7\}$; b) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. **8.** a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; b) $[2, +\infty)$; c) $\mathbb{R}$. **9.** $a = b = 1$, $A = \mathbb{Z}$. **10.** a) $-2$; 3; b) $\operatorname{Im} f = \{-3, -1, 1, 3\}$. **11.** a) $m_a = 1$, $m_g = 9$; b) $A = \sqrt{2}[(a\sqrt{2}+1)-(b\sqrt{2}+1)] = 2(a-b) \in \mathbb{Z}$. **12.** a) 115; b) 0. **13.** a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = 1$; c) $x \in \{-1, 3\}$. **14.** $x \in [-3, 1]$. **15.** a) $f(\sqrt{2}) - f(\sqrt{3}) = 3(\sqrt{3}-\sqrt{2}) > 0$, deci $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3})$; b) $f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 0 \in \mathbb{Q}$, $f(0) = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **16.** a) $m \in \{0, 1\}$; b) $\frac{1}{101}$. **17.** a) $f(0) = 0, f(5) = 5, f(9) = 2, f(1000) = 6, f(3003) = 0$; b) $\operatorname{Im} f = \{0, 1, ..., 6\}$. **18.** a) $f(-5) = 25$; $f(-\sqrt{3}) = 3, f(-1) = 1, f(\sqrt{2}) = 2, f(2) = 2, f(4) = 3$; b) Observăm că $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f(x) \geq 1$, $x \in (-1, 2] \Rightarrow f(x) = 2$, $x \in (2, \infty) \Rightarrow f(x) \in (1, \infty)$, prin urmare $f(x) \geq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **19.** a) Trecem $x \to x + 1$ și obținem că $f(x) = 2x + 3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; b) Trecem $x \to \frac{x}{2}$ și obținem că $f(x) = \frac{x^2}{4}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **20.** a) Luăm $x = -1$ în relația din ipoteză; obținem că $f(0) = -2 - f(0)$, de unde $f(0) = -1$; b) În $f(x + 1) = 2x + 1$, trecem $x \to x - 1$, obținând $f(x) = 2x - 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **21.** a) $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) \in \{1, 2\}$, deci există două asemenea funcții; b) $f(b) = f(c) = 2$, $f(a) \in \{1, 2\}$, deci există două astfel de funcții. **22.** a) $f(1) = f(2) = ... = f(10) = 1$, deci există o singură funcție; b) există un unic $i \in \{1, 2, ..., 10\}$ pentru care $f(i) = 1$, iar $f(j) = 0$, $\forall\, j \neq i$; obținem 10 astfel de funcții. **23.** $s(t) = 70t$, respectiv $s(t) = 50 + 70t$. **24.** $u(t) = 6t$. **25.** b) $g(n) = 800 \cdot n - f(n) = 400n - 10000000$; $g(20000) = -2000000 < 0$, $g(30000) = 2000000 > 0$; la o producție de 20000 unități, fabricantul are o pierdere de 2000000 lei, iar la o producție de 30000 mașini de spălat, are un profit de 2000000 lei; c) $n > 25000$; pentru aceste valori ale lui $n$, fabricantul are profit.

### III.2. Graficul unei funcţii

**1.** a) $G_f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$; b) $G_f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 0), (2, 4)\}$; c) $G_f = \{(1, -1), (3, -1), (4, 1)\}$;

# GEOMETRIE

## CAPITOLUL IV. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU

### IV.1. Puncte. Drepte. Plane

**1.** 180°. **2.** $P_1$: A; $P_2$: F; $P_3$: A. **3.** a) $AB$ și $CD$ sunt necoplanare, $D \notin \alpha$; b) $(ABC) \cap \alpha = AB$; c) $(ACD) \cap (BOC) = CD$. **4.** $P_1$: A; $P_2$: F; $P_3$: A; $P_3$: A. **5.** a) Sunt 8 drepte: $AB$, $AC$, $AD$, $BC$, $CD$, $DB$, $AM$ și $BM$; b) Sunt 5 plane: $(ABC)$, $(ACD)$, $(ABD)$, $(BCD)$, $(ABM)$. **6.** a) Sunt 7 plane: $(ABC)$, $(PAB)$, $(PBC)$, $(PCD)$, $(PAD)$, $(PAC)$, $(PBD)$; b) $(PAC) \cap (PBD) = PO$, unde $\{O\} = AC \cap BD$; c) $AB$ și $CD$ sunt paralele, $AC$ și $BD$ sunt concurente, iar $PA$ și $BC$ sunt necoplanare. **7.** a) Dreptele concurente $AC$ și $BD$ determină un plan, iar punctele $A$, $B$, $C$, $D$ aparțin acestui plan; b) $\mathscr{A}_{ABCD} = 260$ cm$^2$; c) Deoarece $\frac{OC}{OA} \neq \frac{OD}{OB}$, rezultă că dreptele coplanare $AB$ și $DC$ sunt concurente într-un punct $P$. Avem $P \in AB \subset \alpha$ și $P \in CD$, deci planul $\alpha$ și dreapta $CD$ au un punct comun. **8.** Dreptele $BD$ și $EF$ sunt concurente în mijlocul segmentului $AC$, deci determină un plan. Punctele $B$, $F$, $D$, $E$ aparțin planului $\alpha$, deci sunt coplanare. **9.** Punctele $A$, $O$, $C$ sunt coliniare, deci punctele $A$, $C$, $E$, $O$ sunt coplanare. **10.** Medianele $AM$, $BN$ și $CP$ ale triunghiului $ABC$ sunt concurente în $G$. Cele trei plane considerate conțin dreapta $DG$.

### IV.2. Piramida

**1.** a) piramidă patrulateră; b) piramidă triunghiulară sau tetraedru; c) piramidă hexagonală; d) piramidă triunghiulară sau tetraedru; e) piramidă pentagonală. **2.** De exemplu: a) unele cutii pentru lapte, unele corturi; b) piramidele egiptene, unele acoperișuri. **4.** a) piramidă triunghiulară; b) piramidă patrulateră; c) piramidă hexagonală. **5.** 60 cm. **6.** 12 m. **7.** $4\sqrt{3}$ cm$^2$. **8.** 4,5 cm. **9.** $27\sqrt{3}$ cm$^2$. **10.** a) $\mathscr{P}_{ANB} = 6(1+\sqrt{3})$ cm; b) $MN = 3\sqrt{2}$ cm; c) $(ANB) \cap (CMD) = MN$. **11.** Deoarece $MP = 3\sqrt{2}$ cm și $MN = NP = 3$ cm, avem $MP^2 = MN^2 + NP^2$, deci $\sphericalangle MNP = 90°$ și atunci $\mathscr{A}_{MNP} = 4{,}5$ cm$^2$. **12.** 24 cm. **13.** a) $(ADE) \cap (CDF) = BD$; b) $(ABC) \cap (DEF) = EF$. **14.** 33 cm și 12 cm$^2$. **15.** $32\sqrt{3}$ dm$^2$. **16.** a) $AB = 12$, $VM = \frac{AB}{2} = 6$ cm; b) $CV^2 + VM^2 = CM^2 \Rightarrow \sphericalangle CVM = 90°$; c) $VO = 2\sqrt{6}$ cm. **17.** Triunghiul $ABC$ este echilateral, deci $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6$ cm $= VA$. **18.** 49 cm$^2$. **19.** 48 cm. **20.** $MP = 6$ cm, $SO = 4$ cm. **21.** 4 cm$^2$, $\sqrt{3}$ cm$^2$. **22.** Dacă $VA = AB = a$, atunci $BD = a\sqrt{2}$, căci $BD$ este diagonala pătratului $ABCD$ cu $AB = a$. Cum $VB^2 + VD^2 = 2a^2 = BD^2$, rezultă că $VB \perp VD$. **23.** Deoarece $VA = AC = CV = a\sqrt{2}$, rezultă că triunghiul $VAC$ este echilateral, deci $\mathscr{A}_{VAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ cm$^2$. **24.** a) $12(1+\sqrt{2})$ cm; b) 60°. **25.** Cum diagonala $BD$ a pătratului $ABCD$ este egală cu $8\sqrt{2}$ cm, avem $VD^2 + VB^2 = (8\sqrt{2})^2 = BD^2$, deci $\sphericalangle BVD = 90°$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice

## Capitolul VI. Recapitularea materiei din clasele V-VII

### VI.1. Numere naturale

**1.** a) 12; b) 6; c) 27; d) 3. **2.** a) 2; b) 267; c) 17; d) 0; e) 20; f) 167. **3.** b) 19. **4.** a) 7; b) 18; c) 4; d) 3. **5.** a) $44^2$; b) $13^3$. **6.** 250, 254, 256. **7.** 270 și 675. **8.** $a = 13$, $b = 260$ sau $a = 26$, $b = 169$. **9.** a) $S = 111(a + b + c)$ și $111 = 37 \cdot 3$, deci se divide cu 37; b) $S \in \{666, 777, 888, 999\}$. **10.** $n = 0, 2, 3$ sau 23. **11.** Evident, $a$ se divide cu 2. Cum $a = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \ldots + (2^{23} + 2^{24}) = 2 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3 + \ldots + 2^{23} \cdot 3$ și $a = (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \ldots + (2^{22} + 2^{23} + 2^{24}) = 2 \cdot 7 + 2^4 \cdot 7 + \ldots + 2^{22} \cdot 7$, deducem că $a$ se divide cu 3 și cu 7. Astfel, $a$ se divide cu $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. **12.** $a = 2 \cdot 4^n \cdot 7^{n+1}$ se divide cu $2 \cdot 4 \cdot 7^2 = 392$ pentru $n \geq 1$. **13.** $\frac{2}{5}$. **14.** b) $\frac{2}{5}$. **15.** $A = \{2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5, 6\}$. **16.** a) Elementele mulțimii $A$ sunt de forma $3n + 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots, 99$, deci $203 = 3 \cdot 67 + 2 \notin A$; b) 99 de elemente; c) $m_a = \frac{3(1+2+\ldots+99)+99}{99} = 3 \cdot 50 + 1 \in A$. **17.** $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$. **18.** Relația este echivalentă cu $4a = 5(b + 2)$, deci $4a$ se divide cu 5. Găsim $a = 5$, $b = 2$. **19.** a) $n = 9(11a - b)$; b) $n_{minim} = 18$, $n_{maxim} = 882$. **20.** Dacă $a \leq 4$, rezultă $\overline{abc} + \overline{ab} + a \leq 499 + 49 + 4 < 628$. Pentru $a \geq 6$, rezultă $\overline{abc} + \overline{ab} + a \geq 600 + 60 + 6 > 628$. Prin urmare, $a = 5$. Pentru $a = 5$, găsim $\overline{bc} + b = 73$ și, de aici, $b = 6$ și $c = 7$. În concluzie, $\overline{abc} = 567$. **21.** 720, 721, …, 729. **22.** a) $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$; b) Din $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$, deducem $b = 48$. **23.** Fie $n$ numărul căutat. Atunci $n = 12x + 9$, $n = 15y + 12$ și $n = 17z$, $x, y, z \in \mathbb{N}$. Rezultă $n + 3 = 12(x + 1) = 15(y + 1)$, deci $n + 3$ se divide cu 12 și 15. Prin urmare, $n + 3$ este multiplu de 60, de aici $n \in \{57, 117, 177, 237, 297, 357, 417, \ldots\}$. Cum $n$ se divide cu 17, prima valoare convenabilă este $n = 357$. **24.** Fie $n$ numărul căutat. Atunci $n = 12x + 7$, $n = 15y + 7$, $n = 18z + 7$, $x, y, z \in \mathbb{N}^*$. Astfel, $n - 7$ este multiplu de 12, 15 și 18. Prin urmare, $n - 7$ este multiplu de 180. Cum $n$ este minim și $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, găsim $n = 187$. **25.** Din teorema împărțirii cu rest, $77 = n \cdot x + 5$, $182 = n \cdot y + 2$, $225 = n \cdot z + 3$, $n > 5$. Rezultă că $n$ este divizor al numerelor 72, 180 și 252. Cel mai mare divizor comun al numerelor 72, 180 și 252 este 36. Prin urmare, $n$ este divizor al numărului 36 și $n > 5$. Rezultă $n \in \{6, 9, 12, 18, 36\}$. **26.** a) 18; b) 106; c) 27; d) 42; e) 108; f) 8. **27.** 3, 4, 5, 6, 7. **28.** a) Cum $a + b + c = 432$, $c = 234 + a + b$, deducem $c = 333$ și $a + b = 99$; b) $(a, b) \in \{(1, 98), (2, 97), \ldots, (44, 45)\}$, deci $a_{max} = 44$; c) 44 de perechi. **29.** Fie $x$ rânduri cu 16 scaune. Atunci $16 \cdot x + 18(20 - x) = 350$, deci $x = 5$; 15 rânduri au câte 18 scaune. **30.** Fie $n$ numărul băncilor din clasă. Atunci numărul elevilor din clasă va fi $2n + 3$ și $3(n - 3) + 2$. Rezultă $2n + 3 = 3(n - 3) + 2$, deci $n = 10$. Sunt 23 de elevi. **31.** Fie $a$ și $b$ numărul de elevi care participă numai la olimpiada de fizică, respectiv numai la cea de chimie, iar $c$ numărul de elevi care participă la ambele olimpiade. Rezultă că $a + b + c = 24$, $a + c = 18$, $b + c = 13$. Deducem $a = 11$, $b = 6$, $c = 7$. **32.** Fie $n$ numărul cărților de pe al doilea raft. Atunci $2(3n - 10) = n + 10$, deci $n = 6$. Pe primul raft sunt 18 cărți.

### VI.2. Numere întregi. Numere raționale

**1.** a) 12; b) –18; c) 25; d) –1; e) –1; f) –18. **2.** a) –3; b) 0; c) 25; d) –4. **3.** (2, –2); (2, –1); (1, –1). **4.** $a = -1$; $S = 1$. **5.** –2. **6.** $(x, y) \in \{(0, -3), (0, 3), (1, 2), (1, -4), (2, 1), (2, -5)\}$. **7.** a) 38; b) –15;